

POLITECNICO DI MILANO



# MECCANICA DEI FLUIDI

## 8. FLUIDI VISCOSI: EQUAZIONI GENERALI

A cura di: DIEGO BERZI

v2.3

## Indice

<b>1</b>	<b>Bilancio di quantità di moto</b>	<b>3</b>
1.1	Forma indefinita . . . . .	3
1.2	Forma globale . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Equazioni in forma adimensionale</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Soluzioni analitiche</b>	<b>14</b>
3.1	Flusso piano di Couette . . . . .	14
3.2	Flusso piano di Poiseuille . . . . .	16
3.3	Flusso piano di Couette-Poiseuille . . . . .	19
3.4	Moto di Poiseuille in condotta . . . . .	21
3.5	Lubrificazione . . . . .	28

# 1 Bilancio di quantità di moto

## 1.1 Forma indefinita

Vediamo ora di definire i 6 legami costitutivi per gli elementi del tensore degli sforzi da introdurre nelle equazioni di bilancio di quantità di moto (Cap. 4, Par. 2) nel caso di Fluidi Reali.

I legami costitutivi devono esprimere la relazione (reologia) tra gli sforzi applicati e le deformazioni subite dal fluido. Limitiamo la nostra attenzione ad una particolare categoria di fluidi, denominati **Fluidi Stokesiani**, per i quali:

- quando la velocità si annulla, il tensore degli sforzi  $\overline{\overline{\Phi}}$  si riconduce al caso statico  $p\overline{\overline{\mathbf{I}}}$  (Cap. 2, Par. 1.1).
- Gli sforzi dipendono dalle velocità di deformazione (identificate dal tensore delle velocità di deformazione  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ , Cap. 3, Par. 2.1) e non dalle deformazioni. Questo perché, a differenza dei solidi, la deformazione in risposta ad uno sforzo finito è infinita (questa caratteristica si riflette nel fatto che i fluidi non hanno forma propria, ma assumono quella del recipiente che li contiene), mentre la velocità con cui avviene la deformazione è finita.
- La funzione che lega gli sforzi alle velocità di deformazione è indipendente dal sistema di riferimento adottato.

La prima condizione è soddisfatta se

$$\overline{\overline{\Phi}} = p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\Phi}}_{dev}, \quad (1)$$

dove  $\overline{\overline{\Phi}}_{dev}$  è un tensore, detto **deviatore degli sforzi**, che si annulla quando è nulla la velocità. La seconda condizione implica che

$$\overline{\overline{\Phi}}_{dev} = \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}), \quad (2)$$

dove  $\overline{\overline{\mathbf{f}}}$  è una funzione tensoriale di  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ . Con Eqs. (1) e (2), dunque,

$$\overline{\overline{\Phi}} = p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}). \quad (3)$$

Immaginiamo ora di ruotare il nostro sistema di riferimento cartesiano. Identifichiamo con  $\overline{\overline{\Phi}}'$  e  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}'$  i tensori degli sforzi e delle velocità di deformazione nel nuovo sistema di riferimento (la pressione  $p$  è uno scalare indipendente dal sistema di riferimento). La terza condizione cui devono sottostare i fluidi Stokesiani implica che l'Eq.(3) continui a valere, con  $\overline{\overline{\Phi}}'$  e  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}'$  invece di  $\overline{\overline{\Phi}}$  e  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ :

$$\overline{\overline{\Phi}}' = p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}') . \quad (4)$$

Introducendo la matrice  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  dei coseni direttori tra gli assi del vecchio e del nuovo sistema di riferimento, il tensore degli sforzi nel nuovo sistema di riferimento si ottiene come  $\overline{\overline{\mathbf{\Phi}'}} = \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}$ , per cui, con l'Eq.(3),

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{\Phi}'}} &= \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot p\overline{\overline{\mathbf{I}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} \\
&= p\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{I}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} \\
&= p\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} \\
&= p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \tag{5}
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà distributiva del prodotto matriciale rispetto alla somma, il fatto che una matrice moltiplicata per la matrice identità è uguale a sé stessa e il fatto che  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}$ . Confrontando le Eqs. (4) e (5), con  $\overline{\overline{\mathbf{D}'}} = \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}$ , si vede che deve essere

$$\overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) = \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}. \tag{6}$$

Ogni funzione del tipo  $\overline{\overline{\mathbf{f}}} = \overline{\overline{\mathbf{f}}}_1 + f_2\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ , con  $\overline{\overline{\mathbf{f}}}_1$  funzione tensoriale di  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  e  $f_2$  funzione scalare di  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  invariante col sistema di riferimento, rispetta l'Eq.(6) se vale

$$\overline{\overline{\mathbf{f}}}_1(\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) = \overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{f}}}_1(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}, \tag{7}$$

dal momento che  $f_2\overline{\overline{\mathbf{I}}}$  è invariante a trasformazioni del sistema di riferimento ( $\overline{\overline{\mathbf{T}}}^{-1} \cdot f_2\overline{\overline{\mathbf{I}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}} = f_2\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ ). Esistono tre combinazioni degli elementi di  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  che sono invarianti col sistema di riferimento: l'invariante lineare (traccia),  $I_1$ , quadratico (somma dei minori principali),  $I_2$ , e cubico (determinante),  $I_3$ , che rappresentano i coefficienti del polinomio caratteristico, le cui radici sono gli autovalori della matrice  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  [1]. Il coefficiente scalare  $f_2$  deve, dunque, necessariamente essere funzione di tali invarianti,  $f_2 = f_2(I_1, I_2, I_3)$ . Riassumendo, e raccogliendo i termini che moltiplicano la matrice identità, l'espressione

$$\overline{\overline{\mathbf{\Phi}}} = [p + f_2(I_1, I_2, I_3)]\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{f}}}_1(\overline{\overline{\mathbf{D}}}), \tag{8}$$

con le condizioni che sia soddisfatta l'Eq.(7) e che  $\overline{\overline{\mathbf{f}}}_1(\overline{\overline{\mathbf{0}}}) = \overline{\overline{\mathbf{0}}}$  e  $f_2(0, 0, 0) = 0$ , rappresenta la **reologia dei Fluidi Stokesiani**.

A questo punto, limitiamo ulteriormente la nostra analisi a quei fluidi, chiamati **Fluidi Newtoniani**, per i quali la dipendenza del tensore degli sforzi da quello delle velocità di deformazione è lineare. Con tale ipotesi, scompare la dipendenza dagli invarianti non lineari  $I_2$  e  $I_3$ , e risulta, necessariamente,  $\overline{\overline{\mathbf{f}}}_1(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) = a\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  e  $f_2(I_1) = bI_1$ , con  $a$  e  $b$  coefficienti numerici. La

forma più generale del legame lineare tra  $\overline{\overline{\Phi}}$  e  $\overline{\overline{D}}$  implicherebbe, in realtà,  $\overline{\overline{f}}_1(\overline{\overline{D}}) = \overline{\overline{a}} \circ \overline{\overline{D}}$ , cioè il prodotto di Hadamard tra una matrice di coefficienti numerici  $\overline{\overline{a}}$  e  $\overline{\overline{D}}$  (Cap. 1, Par. 1.2). Si verifica facilmente, però, che tale espressione è incompatibile con l'Eq.(7), a meno che gli elementi di  $\overline{\overline{a}}$  non siano tutti uguali tra di loro e pari ad  $a$ .

L'Eq.(8) diventa, dunque,

$$\overline{\overline{\Phi}} = (p + b\nabla \cdot \overline{\overline{v}})\overline{\overline{I}} + a\overline{\overline{D}}, \quad (9)$$

dal momento che  $I_1$ , la **traccia** del tensore  $\overline{\overline{D}}$ , risulta uguale alla divergenza della velocità (Cap. 3, Par. 2.2). Incidentalmente, l'Eq.(9) mostra che  $\overline{\overline{\Phi}}$  e  $\overline{\overline{D}}$  sono **collineari**: entrambi sono simmetrici, per cui diagonalizzabili [1], ed il sistema di riferimento, detto sistema di riferimento principale, nel quale i due tensori sono diagonali coincide. Vediamo ora quale è il significato fisico dei coefficienti  $a$  e  $b$ .

L'Eq.(9) deve valere anche nel caso, analizzato sperimentalmente, di flusso tra lastre piane parallele, dove la lastra superiore è in moto con velocità costante e la lastra inferiore è ferma (Cap. 1, Par. 2.3). In quel caso, risultava

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (10)$$

dove  $\tau$  è lo sforzo tangenziale che agisce sulla lastra superiore, parallela alla direzione del moto  $x$  e perpendicolare all'asse  $y$  (e avente normale discorde rispetto a quella dell'asse  $y$ ), e  $\mu$  è la viscosità dinamica. L'Eq.(10) è detta **Legge di Newton**. Lo sforzo tangenziale  $\tau$ , rappresenta, dunque, la componente in direzione  $x$  dello sforzo che agisce sulla faccia che ha per normale l'asse  $(-y)$ , cioè  $\tau = \Phi_{-yx} = -\Phi_{yx}$ . Dall'Eq.(9) si ottiene

$$\Phi_{yx} = aD_{yx}, \quad (11)$$

e, ricordando la definizione del tensore delle velocità di deformazione,

$$\Phi_{yx} = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{a}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (12)$$

visto che, nel caso in esame,  $v = 0$ . Confrontando le Eqs. (10) e (12) si ottiene  $a = -2\mu$ . Dal momento che  $a$  è il solo coefficiente che moltiplica i termini rettangolari di  $\overline{\overline{D}}$  nell'Eq.(9), esso (e, quindi  $\mu$ ) è indice della resistenza che il fluido oppone a cambiamenti di forma.

Calcoliamo ora l'invariante lineare (traccia) del tensore degli sforzi dall'Eq.(9):

$$\text{tr}(\overline{\overline{\Phi}}) = (p + b\nabla \cdot \overline{\overline{v}})\text{tr}(\overline{\overline{I}}) + a\text{tr}(\overline{\overline{D}}) = 3p + 3b\nabla \cdot \overline{\overline{v}} + a\nabla \cdot \overline{\overline{v}}, \quad (13)$$

essendo la traccia della matrice identità uguale a 3. In statica, la velocità è nulla, per cui la traccia del tensore degli sforzi è pari a  $3p$ . Nel caso di fluidi incomprimibili, la traccia del tensore degli sforzi è sempre pari a  $3p$  perché l'equazione di continuità indica che la divergenza della velocità è nulla (Cap. 4, Par. 1.1). L'**ipotesi di Stokes** [2], verificata sperimentalmente, è che la traccia del tensore degli sforzi sia pari a  $3p$  anche nel moto di fluidi comprimibili. Tale ipotesi è verificata se risulta  $b = -a/3$ . Il coefficiente  $b$ , che moltiplica la divergenza della velocità nell'Eq.(9), quantità che esprime la variazione percentuale di volume nell'unità di tempo, è indice della resistenza che il fluido oppone a variazioni di volume: per questo viene denominato **viscosità di dilatazione**.

Con le espressioni appena ottenute per i coefficienti  $a$  e  $b$ , l'Eq.(9) diventa

$$\overline{\overline{\Phi}} = \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right) \overline{\overline{\mathbf{I}}} - 2\mu\overline{\overline{\mathbf{D}}}, \quad (14)$$

che rappresenta la **reologia dei Fluidi Newtoniani**.

Inseriamo ora la reologia dei Fluidi Newtoniani nell'equazione di bilancio di quantità di moto in forma indefinita (Cap. 4, Par. 2.1). Sia nella forma Lagrangiana che in quella Euleriana compare la divergenza del tensore degli sforzi, che, usando l'Eq.(14), risulta

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}} = \nabla \cdot \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right) \overline{\overline{\mathbf{I}}} - \nabla \cdot (2\mu\overline{\overline{\mathbf{D}}}) = \nabla \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right) - 2\mu\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}, \quad (15)$$

visto che la divergenza di uno scalare che moltiplica la matrice identità è uguale al gradiente dello scalare stesso (Cap. 5, Par. 1) e ipotizzando che la viscosità dinamica sia omogenea all'interno del fluido (non vari nello spazio). La divergenza del tensore delle velocità di deformazione che compare nell'Eq.(15) si può scrivere come

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} &= \frac{\partial D_{ji}}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \hat{\mathbf{i}}_i = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \hat{\mathbf{i}}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}}) + \frac{1}{2} \nabla^2 \overline{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (16)$$

dove si è introdotto l'**operatore Laplaciano**  $\nabla^2$  (prodotto scalare del vettore nabla con sé stesso). Introducendo l'Eq.(16) nell'Eq.(15) e raccogliendo, si ottiene

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}} = \nabla \left( p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right) - \mu\nabla^2 \overline{\mathbf{v}}. \quad (17)$$

Possiamo utilizzare questo risultato e sostituire la divergenza del tensore degli sforzi nell'equazione di bilancio di quantità di moto (ad esempio in quella Euleriana non conservativa, Cap. 4, Par. 2.1), ottenendo

$$\rho \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \left( p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} \right) + \mu \nabla^2 \overline{\mathbf{v}}, \quad (18)$$

che, insieme all'equazione di continuità (Cap. 4, Par. 1.1),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (19)$$

e all'equazione di stato  $\rho = \rho(p, T)$  costituiscono un sistema di 5 equazioni scalari nelle 5 incognite  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  che consentono di risolvere completamente la **dinamica isoterma dei fluidi Newtoniani comprimibili** (se la temperatura non è costante occorre introdurre un'ulteriore equazione di bilancio energetico per risolvere anche il campo delle temperature). Esse costituiscono le **Equazioni di Stokes** [2] per fluidi comprimibili in forma indefinita (George Gabriel Stokes fu il primo nel 1845 ad includere nelle equazioni governanti il moto dei fluidi viscosi il termine associato alla viscosità di dilatazione).

Se il fluido è incomprimibile ( $\rho = \text{costante}$ ), l'equazione di continuità si riduce, come sappiamo (Cap. 4, Par. 1.1), a

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (20)$$

che, introdotta nell'Eq.(18), riduce l'equazione di bilancio di quantità di moto alla

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}. \quad (21)$$

Le Eqs. (20) e (21) costituiscono le **Equazioni di Navier-Stokes** [2, 3] per fluidi incomprimibili in forma indefinita (4 equazioni scalari nelle 4 incognite  $p$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ ).

Le equazioni di Navier-Stokes sono equazioni differenziali alle derivate parziali che necessitano, per essere risolte, di condizioni iniziali e condizioni al contorno. Non possono essere risolte per via analitica se non in casi estremamente semplici che vedremo in seguito. In effetti, non è ancora nemmeno stata dimostrata l'esistenza e/o la regolarità della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes nel caso generale 3D. Le caratteristiche delle equazioni di Navier-Stokes che le rendono, in generale, difficili da risolvere sono la **non-linearità**, dovuta alle inerzie convettive ( $\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}$ ), e l'**ellitticità**, dovuta al termine viscoso proporzionale al Laplaciano della velocità ( $\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$ ). Il termine convettivo è responsabile, come vedremo, della mancata attenuazione delle piccole perturbazioni del moto (instabilità) all'origine della turbolenza; inoltre, la non-linearità è la ragione per cui, in generale, non esiste una soluzione analitica delle equazioni di Navier-Stokes. L'ellitticità implica, in generale, che la soluzione sul contorno del dominio (condizioni al contorno) dipende dalla soluzione all'interno del dominio, rendendo il problema implicito.

Il fatto che nell'Eq.(21) compaia l'accelerazione di gravità sembra suggerire che questa debba sempre fare parte delle variabili di controllo in un problema fluidodinamico. Visto che, in statica, l'Eq.(21) si riduce ad un

bilancio tra il gradiente di pressione e il termine gravitazionale, definiamo

$$\nabla p_{stat} = -\rho g \nabla \tilde{z}, \quad (22)$$

con  $p_{stat}$  che rappresenta la **componente idrostatica** della pressione. Se introduciamo l'Eq.(22) nell'Eq.(21) otteniamo

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\nabla p_e + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}, \quad (23)$$

dove  $p_e = p - p_{stat}$  rappresenta l'eccesso della pressione rispetto alla componente idrostatica. Il termine gravitazionale nelle equazioni di Navier-Stokes è, dunque, solo responsabile di aggiungere una componente idrostatica alla pressione. Le incognite vere delle equazioni di Navier-Stokes sono la velocità e l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica. L'accelerazione di gravità non rientra tra i parametri di controllo in un problema fluidodinamico, a meno che non esistano condizioni al contorno governate dalla gravità (interfacce tra fluidi a diverso peso specifico). Questo spiega perché  $g$  non è stata considerata un parametro di controllo nello studio della cadente energetica media (Cap. 7, Par. 1).

## 1.2 Forma globale

Ricaviamo ora le equazioni di Navier-Stokes in forma globale. Al solito, bisogna identificare un volume di controllo finito  $W$ , costante nel tempo e fisso nello spazio, ed integrare le equazioni su di esso. La forma globale dell'equazione di continuità è stata ottenuta in precedenza (Cap. 4, Par. 1.2). Per quanto riguarda il bilancio di quantità di moto, riscriviamo innanzitutto l'Eq.(21) in forma conservativa, con il procedimento già illustrato nel Par. 2.1 del Cap. 4. Otteniamo

$$\frac{\partial (\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}, \quad (24)$$

e, integrando sul volume e spostando tutti i termini a secondo membro,

$$\int_W \left[ -\frac{\partial (\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) - \rho g \nabla \tilde{z} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \right] dW = \bar{\mathbf{0}}. \quad (25)$$

Tre di questi termini li abbiamo già incontrati (e manipolati) nel Par. 2.2 del Cap. 4. In particolare,

$$\begin{aligned} -\int_W \frac{\partial (\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dW &= -\frac{\partial (\int_W \rho \bar{\mathbf{v}} dW)}{\partial t} = \bar{\mathbf{I}}, \\ -\int_W \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) dW &= \int_A \rho (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}} dA = \bar{\mathbf{M}}, \\ -\int_W \rho g \nabla \tilde{z} dW &= -\left( \int_W \rho dW \right) g \nabla \tilde{z} = \bar{\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (26)$$



Il termine contenente il gradiente di pressione è lo stesso termine che compare nell'equazione globale della statica (Cap. 2, Par. 1.3),

$$-\int_W \nabla p dW = \int_A p \hat{n} dA = \bar{\Pi}_p. \quad (27)$$

L'unico termine che rimane è quello contenente il Laplaciano della velocità. Riscriviamolo, usando la notazione alla Einstein, e il teorema della divergenza (Cap. 1, Par. 1.4), come

$$\begin{aligned} \int_W \mu \nabla^2 \bar{v} dW &= \int_W \mu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j \partial x_j} dW = - \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} n_j dA \\ &= - \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n} dA \\ &= - \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA, \end{aligned} \quad (28)$$

essendo, per definizione, il coseno direttore  $n_j = \partial x_j / \partial n$ . Introduciamo, dunque, la **risultante degli sforzi viscosi**

$$\bar{\Pi}_\mu = - \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA. \quad (29)$$

Con questa, l'equazione di bilancio di quantità di moto di Navier-Stokes in forma globale risulta

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu = \bar{\mathbf{0}}. \quad (30)$$

## 2 Equazioni in forma adimensionale

Le equazioni di Stokes e le equazioni di Navier-Stokes ricavate nel Par. 1 sono in forma dimensionale: tutti i termini che vi compaiono hanno dimensione non nulla. Una volta risolte (di come si risolvono tali equazioni parleremo diffusamente in seguito), la soluzione trovata si applica solo al particolare caso in esame. Ad esempio, se abbiamo a che fare con due fenomeni simili, ma a diversa scala (Cap. 6, Par. 3), dobbiamo risolvere le equazioni in ciascuna delle due situazioni, con inutile spreco di risorse. Così come conviene usare una formulazione in termini adimensionali quando si cerca la dipendenza di una variabile di stato da variabili di controllo (Cap. 6, Par. 2), allo stesso modo conviene che anche le equazioni governanti un problema siano espresse in termini adimensionali. Per fare questo, occorre innanzitutto determinare le **grandezze scala** del problema, cioè le variabili di controllo che fissano l'ordine di grandezza delle quantità ad esse omogenee.

Consideriamo le equazioni di Stokes. Nelle Eqs. (18) e (19) compaiono come variabili la pressione, la densità e la velocità che variano nello spazio e nel tempo. In generale, dunque, esisteranno una pressione  $P$ , una densità  $R$ , una velocità  $V$ , una lunghezza  $L$  e un tempo  $T$  caratteristici del problema in esame. Per esempio,  $L$  rappresenta una dimensione caratteristica del dominio geometrico all'interno del quale vogliamo risolvere il moto del fluido;  $T$  potrebbe rappresentare il periodo di oscillazione di una forzante del moto avente carattere periodico (come nel caso del flusso sanguigno). Una volta individuate le grandezze scala, si costituiscono le variabili adimensionali (nel seguito identificate usando l'accento anticirconflesso) dividendo la variabile dimensionale per la grandezza scala ad essa omogenea: per le coordinate spaziali risulta  $\check{x} = x/L$ ,  $\check{y} = y/L$  e  $\check{z} = z/L$ ; per la variabile temporale  $\check{t} = t/T$ ; per le componenti della velocità  $\check{u} = u/V$ ,  $\check{v} = v/V$  e  $\check{w} = w/V$ ; per la pressione  $\check{p} = p/P$ ; per la densità  $\check{\rho} = \rho/R$ . Se le grandezze scala sono state individuate correttamente, le quantità adimensionali sono tutte di ordine di grandezza uno. Scriviamo ora nell'Eq.(19) le variabili dimensionali come prodotto della grandezza scala per la variabile in forma adimensionale. Risulta

$$\frac{R}{T} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \check{t}} + \frac{RV}{L} \check{\nabla} \cdot (\check{\rho} \check{\mathbf{v}}) = 0, \quad (31)$$

dove  $\check{\nabla} = (\partial/\partial \check{x}_j) \hat{\mathbf{i}}_j$ , e le grandezze scala sono state estratte dagli operatori di derivazione essendo variabili di controllo (costanti) del problema. L'Eq.(31) è ancora dimensionale: i termini che vi compaiono hanno come unità di misura nel sistema internazionale  $\text{kg}/(\text{m}^3\text{s})$  (portata massica per unità di volume). I coefficienti costruiti sulla base delle grandezze scala che moltiplicano i termini dell'equazione forniscono l'ordine di grandezza dei termini stessi. Possono, quindi, essere utilizzati per confrontare tra di loro i vari termini, ed eventualmente scartare quelli che risultano trascurabili, semplificando la soluzione del problema. Dividiamo l'Eq.(31) per il coef-

ficiente moltiplicativo del termine associato con il flusso di massa  $RV/L$ , ottenendo

$$\text{St} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \check{t}} + \check{\nabla} \cdot (\check{\rho} \check{\mathbf{v}}) = 0, \quad (32)$$

dove  $\text{St} = L/(VT)$  è il **numero di Strouhal**, una quantità adimensionale che rappresenta il rapporto tra il tempo che il fluido impiega per attraversare il dominio geometrico,  $L/V$ , ed il tempo scala associato con la non-stazionarietà del moto  $T$  (è l'inverso del gruppo  $\Pi$  associato con la variabile tempo quando si usa la terna inerziale per adimensionalizzare). Se  $\text{St} \rightarrow 0$ , significa che il fluido attraversa il campo di moto molto prima che gli eventuali effetti della non-stazionarietà comincino a farsi sentire: il primo termine dell'Eq.(32) può essere trascurato e il moto del fluido è come se fosse stazionario. Ripetiamo ora il procedimento per l'Eq.(18). Prima però ricordiamo che la divergenza della velocità esprime la variazione percentuale di volume nell'unità di tempo (Cap. 3, Par. 2.2) e che sussiste un legame di proporzionalità tra la variazione di volume e l'incremento di pressione tramite la comprimibilità (Cap. 1, Par. 2.3), per cui

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (33)$$

Inoltre, per maggiore generalità, supponiamo di essere in un sistema di riferimento solidale con la Terra, e, quindi, in rotazione con velocità angolare costante di modulo pari a  $\omega$ . A primo membro dell'Eq.(18) compare, dunque, anche la forza di Coriolis (abbiamo già dimostrato che la forza centripeta equivale ad introdurre una correzione trascurabile nella forza peso, Cap. 4, Par. 2.1). Con l'Eq.(33), il bilancio di quantità di moto nelle equazioni di Stokes si scrive

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \rho (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}) = -\rho g \nabla \check{z} - \nabla p - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\epsilon} \nabla \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}. \quad (34)$$

Scriviamo le variabili dimensionali nell'Eq.(34) come prodotto della grandezza scala per la variabile in forma adimensionale,

$$\begin{aligned} \frac{RV}{T} \check{\rho} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \frac{RV^2}{L} \check{\rho} \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}} + \omega RV \check{\rho} (\check{\boldsymbol{\omega}} \times \check{\mathbf{v}}) &= -Rg \check{\rho} \check{\nabla} \check{z} - \frac{P}{L} \check{\nabla} \check{p} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{P\mu}{\epsilon LT} \check{\nabla} \left( \frac{\partial \check{p}}{\partial \check{t}} \right) \\ &\quad + \frac{\mu V}{L^2} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (35)$$

con  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \omega \check{\boldsymbol{\omega}}$ . L'Eq.(35) è ancora dimensionale: i termini che vi compaiono hanno come unità di misura nel sistema internazionale  $\text{N/m}^3$  (forza per unità di volume). Dividiamo l'Eq.(35) per il coefficiente  $RV^2/L$  che moltiplica le

inerzie convettive; in altre parole, pesiamo tutti i termini dell'equazione rispetto alle inerzie convettive. Risulta

$$\begin{aligned} \text{St}\check{\rho}\frac{\partial\check{\mathbf{v}}}{\partial\check{t}} + \check{\rho}\check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla}\check{\mathbf{v}} + \frac{1}{\text{Ro}}\check{\rho}(\check{\boldsymbol{\omega}} \times \check{\mathbf{v}}) &= -\frac{1}{\text{Fr}^2}\check{\rho}\check{\nabla}\check{\zeta} - \text{Eu}\check{\nabla}\check{p} \\ &\quad -\frac{1}{3}\text{Eu}\frac{\text{Ma}^2}{\text{Re}}\text{St}\check{\nabla}\left(\frac{\partial\check{p}}{\partial\check{t}}\right) \\ &\quad +\frac{1}{\text{Re}}\check{\nabla}^2\check{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (36)$$

dove:

- $\text{Ro} = V/(\omega L)$  è il **numero di Rossby**, che rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e la forza di Coriolis (è l'inverso del gruppo  $\Pi$  associato con la velocità di rotazione del sistema di riferimento quando si usa la terna inerziale per adimensionalizzare); se  $\text{Ro} \rightarrow \infty$ , le forze di inerzia sono preponderanti rispetto alla forza di Coriolis, e quest'ultima può essere trascurata nell'equazione di bilancio della quantità di moto. Sulla Terra,  $\omega$  è dell'ordine di  $10^{-4}$  Hz, e la tipica velocità scala  $V$  nelle normali applicazioni è dell'ordine di 1 m/s; il numero di Rossby è, dunque, sempre molto maggiore di 1, per dimensioni  $L$  del campo di moto inferiori al kilometro. Se non siamo interessati alla soluzione di flussi nell'ambito di fenomeni geofisici e/o atmosferici, possiamo perciò trascurare la forza di Coriolis nella scrittura dell'equazione di bilancio della quantità di moto.
- $\text{Fr} = V/(gL)^{1/2}$  è il **numero di Froude**, che rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e la forza peso (è l'inverso della radice quadrata del gruppo  $\Pi$  associato con la gravità quando si usa la terna inerziale per adimensionalizzare). In realtà, se si introduce l'eccesso della pressione rispetto all'idrostatica  $p_e$ , la forza peso non compare più esplicitamente nell'equazione di bilancio di quantità di moto, e il numero di Froude non è presente nell'Eq.(36). Come già detto, il numero di Froude (cioè la gravità) non rientra tra i parametri di controllo, a meno che non compaia nelle condizioni al contorno.
- $\text{Eu} = P/(RV^2)$  è il **numero di Eulero**, che rappresenta il rapporto tra le forze di pressione e le forze di inerzia (è il gruppo  $\Pi$  associato con la pressione quando si usa la terna inerziale per adimensionalizzare).

Il numero di Reynolds,  $\text{Re}$ , e il numero di Mach,  $\text{Ma}$ , che compaiono nell'Eq.(35) sono stati introdotti in precedenza (Cap. 7), e possono essere interpretati, rispettivamente, come il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosse e il rapporto tra le forze di inerzia e le forze necessarie a comprimere il fluido. Questo spiega perché, per valori elevati del numero di Reynolds (situazione tipica nella pratica), le inerzie contano più delle forze viscosse, e

sia consigliabile utilizzare una terna inerziale per adimensionalizzare il problema (Cap. 7, Par. 1). Per  $Ma \rightarrow 0$ , le forze necessarie a comprimere il fluido sono molto maggiori delle forze di inerzia, e il flusso può essere considerato incomprimibile (autosimilitudine rispetto al numero di Mach, Cap. 7, Par. 1.3). Le Eqs. (32) e (36) rappresentano le **equazioni di Stokes in forma adimensionale**.

Nel caso di fluido incomprimibile,  $\check{\rho} = 1$  e  $Ma = 0$ , per cui, introducendo l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica e trascurando la forza di Coriolis ( $Ro \rightarrow \infty$ ), le Eqs. (32) e (36) si riducono a

$$\check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{v}} = 0, \quad (37)$$

e

$$St \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}} = -Eu \check{\nabla} \check{p}_e + \frac{1}{Re} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}}, \quad (38)$$

che rappresentano le **equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale**.

Se non esiste un particolare tempo scala rappresentativo della non stazionarietà del moto (per esempio perché non sono presenti forzanti di natura periodica), si usa il tempo scala convettivo  $L/V$  per adimensionalizzare le variabili temporali. Allo stesso modo, non è sempre necessario identificare una pressione scala: se non ci sono timori che si verifichino fenomeni di **cavitazione** (transizioni di fase connesse con abbassamenti localizzati della pressione al di sotto della tensione di vapor saturo con susseguente implosione delle bolle di gas e generazione di onde d'urto estremamente violente) si può semplicemente usare la **pressione dinamica**  $\rho V^2$  per adimensionalizzare le pressioni. In questi casi risulta  $St = Eu = 1$ , e l'Eq.(38) si riduce a

$$\frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}} = -\check{\nabla} \check{p}_e + \frac{1}{Re} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}}. \quad (39)$$

Senza condizioni al contorno governate dalla gravità o dalla tensione superficiale (come nel caso di presenza di interfacce tra fluidi non miscibili; l'inverso del gruppo  $\Pi$  associato con la tensione superficiale  $\sigma_T$  quando si usa la terna inerziale è il **numero di Weber**,  $We = \rho V^2 L / \sigma_T$ , che rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e le forze legate alla tensione superficiale), il moto del fluido è interamente determinato dal solo numero di Reynolds.

### 3 Soluzioni analitiche

Ricaviamo ora alcune soluzioni analitiche delle equazioni di Navier-Stokes. Come già detto, non è possibile risolvere, in generale, analiticamente tali equazioni per via della presenza del termine non-lineare rappresentato dalle inerzie convettive. Per ottenere soluzioni analitiche, dunque, occorre considerare configurazioni di flusso in cui il termine delle inerzie convettive è nullo (condizioni di moto laminare in geometrie semplici) o trascurabile. Questo limita le possibili applicazioni delle soluzioni analitiche delle equazioni di Navier-Stokes. Ciononostante, esse si sono rivelate utili per confermare le ipotesi alla base delle equazioni (cioè la reologia dei fluidi Newtoniani) dopo il positivo confronto con gli esperimenti. Più recentemente, le soluzioni analitiche vengono largamente utilizzate per verificare l'accuratezza di codici di calcolo per la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes.

#### 3.1 Flusso piano di Couette

Consideriamo il caso di due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$ , di cui una ferma e l'altra in moto con velocità costante  $V$ ; nell'intercapedine tra le due lastre è presente un fluido Newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità dinamica  $\mu$  (Fig. 1). Usiamo un sistema di riferimento in cui l'asse  $x$  individua la direzione del moto e l'asse  $y$  è perpendicolare alle lastre. La lastra ferma si trova a  $y = 0$ , mentre quella in moto si trova a  $y = \delta$ . Visto che una delle due lastre si muove rispetto all'altra, anche il fluido presente nell'intercapedine si metterà in movimento, per via della condizione (verificata sperimentalmente) di **aderenza (no-slip)** dei fluidi reali alla parete. Ipotizziamo: (1) che la velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = (u, 0)$  (essendo il problema piano ignoriamo la direzione  $z$ ): questo equivale ad ipotizzare che il moto del fluido sia laminare; (2) che il gradiente di pressione in direzione  $x$  sia nullo,  $\partial p_e / \partial x = 0$ . La configurazione di flusso appena descritta prende il nome di flusso piano di Couette e l'abbiamo già incontrata quando abbiamo introdotto il concetto di viscosità (Cap. 1, Par. 2.3).

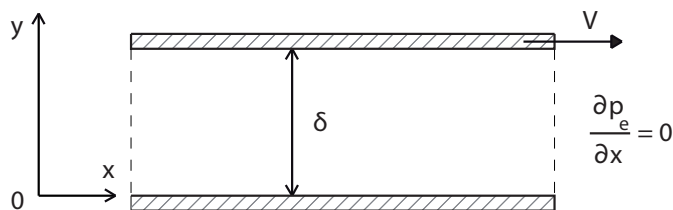


Figura 1: flusso piano di Couette.

Risolviamo le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale. Individuiamo come grandezze scala la velocità  $V$  della lastra superiore e lo spessore dell'intercapedine  $\delta$ . Non essendoci né una pressione scala né un tempo scala caratteristico (essendo la velocità della lastra costante, il moto risulta essere stazionario), usiamo le Eqs. (37) e (39), in cui il numero di Reynolds risulta  $Re = \rho V \delta / \mu$ . L'equazione di continuità per un moto piano risulta

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (40)$$

che, essendo  $\tilde{v} = 0$  per l'ipotesi di laminarità del moto, si riduce a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (41)$$

L'Eq.(41) ci dice che l'unica componente di velocità presente, se varia, varia solo in direzione  $\tilde{y}$ . La determinazione della funzione  $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{y})$ , cioè del **profilo di velocità** in forma adimensionale, costituisce precisamente l'obiettivo del problema. Proiettiamo ora l'Eq.(39) nelle direzioni  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ ,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (42a)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right). \quad (42b)$$

I termini legati alle inerzie locali sono nulli perché il moto è stazionario, mentre  $\tilde{v}$  e le sue derivate sono nulle per la laminarità del moto. Inoltre, sempre per ipotesi,  $\partial \tilde{p}_e / \partial \tilde{x} = 0$ . L'Eq.(41) ci dice che  $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{x} = 0$ , per cui risulta nulla anche la  $\partial^2 \tilde{u} / \partial \tilde{x}^2$ . In definitiva,

$$0 = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (43a)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}}. \quad (43b)$$

Come anticipato, l'ipotesi di laminarità del moto ha reso nulle le inerzie convettive. L'Eq.(43b) ci dice che l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica non varia nemmeno in direzione  $\tilde{y}$  (la pressione è ovunque distribuita in maniera idrostatica). L'Eq.(43a) ci dice che la curvatura del profilo di velocità in direzione  $\tilde{y}$  è nulla, cioè che la velocità è distribuita in maniera lineare. Integrando due volte, otteniamo

$$\tilde{u} = A\tilde{y} + B, \quad (44)$$

dove  $A$  e  $B$  sono le costanti di integrazione da determinare con le condizioni al contorno. È interessante notare che il numero di Reynolds non compare nell'espressione del profilo di velocità, che risulta, dunque, indipendente

dalla viscosità del fluido. Le due condizioni al contorno sono costituite dalla condizione di no-slip alla parete,  $u(0) = 0$  e  $u(\delta) = V$ , o, in forma adimensionale,  $\tilde{u}(0) = 0$  e  $\tilde{u}(1) = 1$ . Con queste si ottiene  $A = 1$  e  $B = 0$ , per cui l'Eq.(44) diventa, semplicemente,

$$\tilde{u} = \tilde{y}. \quad (45)$$

Il profilo di velocità è riportato in Fig. 2.

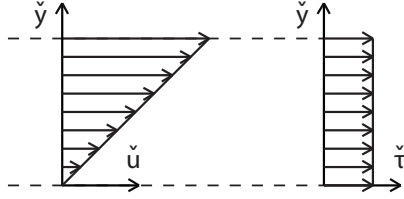


Figura 2: profili di velocità e sforzo tangenziale nel flusso piano di Couette.

Possiamo determinare lo sforzo tangenziale utilizzando l'Eq.(10) (la legge di Newton). Adimensionalizzando, otteniamo

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\rho V^2} = \frac{\mu}{\rho V^2} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu V}{\rho V^2 \delta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Re}}, \quad (46)$$

visto che, dall'Eq.(45), risulta  $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{y} = 1$ . L'Eq.(46) indica che lo sforzo tangenziale è costante lungo  $\tilde{y}$  (Fig. 2). In forma dimensionale, risulta

$$\tau = \mu \frac{V}{\delta}, \quad (47)$$

come da verifica sperimentale.

### 3.2 Flusso piano di Poiseuille

Consideriamo ora il caso di due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$ , entrambe ferme; nell'intercapedine tra le due lastre è presente un fluido Newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità dinamica  $\mu$  (Fig. 3). Usiamo un sistema di riferimento in cui l'asse  $x$  individua una direzione parallela alle lastre e l'asse  $y$  è perpendicolare alle lastre. Una lastra si trova a  $y = 0$ , mentre l'altra a  $y = \delta$ . Ipotizziamo: (1) che la velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = (u, 0)$  (essendo il problema piano ignoriamo la direzione  $z$ ): questo equivale ad ipotizzare che il moto del fluido sia laminare; (2) che sia imposto un gradiente costante di pressione in direzione  $x$ ,  $\partial p_e / \partial x = \text{cost}$ . La configurazione di flusso appena descritta prende il nome di flusso piano di Poiseuille. La forzante del moto del fluido è rappresentata dal gradiente di pressione.



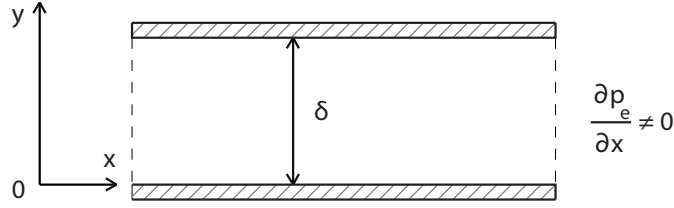


Figura 3: flusso piano di Poiseuille.

Anche in questo caso risolviamo le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale usando come grandezze scala lo spessore  $\delta$  e il modulo della velocità media  $V$  del flusso lungo la direzione  $y$  (al momento incognita). Il numero di Reynolds ha, anche in questo caso, l'espressione  $\text{Re} = \rho V \delta / \mu$ . Visto l'ipotesi di laminarità del moto, l'equazione di continuità si riduce all'Eq.(41), e anche in questo caso si annullano tutti i termini delle inerzie convettive nelle Eqs. (42). Anche le inerzie locali sono nulle visto che la forzante è costante nel tempo e, quindi, il moto è stazionario. Le Eqs. (42) si riducono, allora, a

$$0 = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} \quad (48a)$$

$$0 = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}}. \quad (48b)$$

L'Eq.(48b) ci dice che la pressione è distribuita in maniera idrostatica lungo  $\check{y}$ . L'Eq.(48a) ci dice che il gradiente di pressione in direzione  $\check{x}$  (la forzante del moto) è esattamente bilanciato dal termine viscoso (la resistenza al moto). Ci dice anche che la curvatura del profilo di velocità rispetto a  $\check{y}$  è costante, cioè che la distribuzione della velocità lungo  $\check{y}$  è parabolica. Integriamo una prima volta l'Eq.(48a) ottenendo

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} = \text{Re} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \check{y} + A. \quad (49)$$

Integrando l'Eq.(49) otteniamo

$$\check{u} = \frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \check{y}^2 + A \check{y} + B, \quad (50)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti di integrazione. La costante di integrazione  $A$  si ottiene considerando la simmetria del problema rispetto a  $y = \delta/2$ . In corrispondenza dell'asse di simmetria, la velocità non può che presentare un massimo (o un minimo), visto che, in corrispondenza delle lastre, la velocità è nulla. La condizione di simmetria  $\partial \check{u} / \partial \check{y} = 0$  quando  $\check{y} = 1/2$  fornisce

$$A = -\frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}}. \quad (51)$$

La condizione di aderenza  $\check{u}(0) = 0$  fornisce  $B = 0$ . In definitiva, il profilo di velocità risulta

$$\check{u} = -\frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \check{y}(1 - \check{y}). \quad (52)$$

Il segno del gradiente di pressione in direzione  $x$  imposto determina la curvatura della parabola rappresentata dal profilo di velocità, e, quindi, anche il verso del moto (ricordiamo che la velocità è nulla in corrispondenza delle lastre). Se  $\partial \check{p}_e / \partial \check{x} < 0$  (**gradiente favorevole**) la parabola presenta concavità verso il basso (rispetto all'asse  $x$ ) e il fluido si muove nel verso delle  $x$  positive. Se  $\partial \check{p}_e / \partial \check{x} > 0$  (**gradiente avverso**) la parabola presenta concavità verso l'alto e il fluido si muove nel verso delle  $x$  negative. Il profilo di velocità è rappresentato in Fig. 4 nei due casi di gradiente favorevole e avverso.

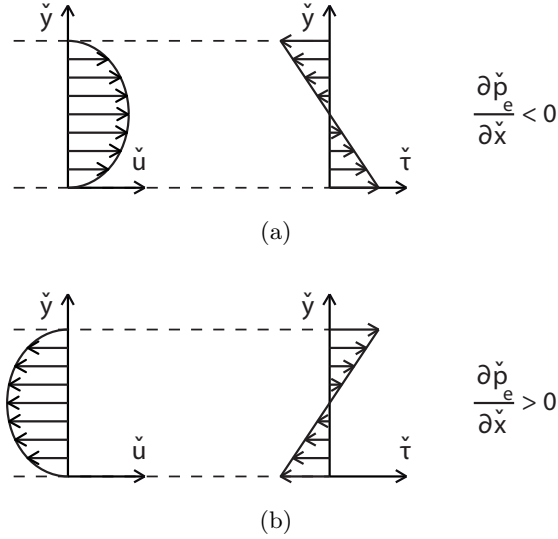


Figura 4: profili di velocità e sforzo tangenziale nel flusso piano di Poiseuille, con gradiente (a) favorevole e (b) avverso.

Dal momento che, per definizione, il modulo della velocità media lungo  $y$  è pari a  $V$ , in forma adimensionale deve risultare che  $\int_0^1 |\check{u}| d\check{y} = 1$ . Integrando l'Eq.(52) e ponendo l'integrale uguale a 1, otteniamo

$$\frac{\text{Re}}{12} \left| \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \right| = 1, \quad (53)$$

cioè  $\text{Re} = 12 |\partial \check{p}_e / \partial \check{x}|^{-1}$ . In forma dimensionale, risulta

$$V = \frac{\delta^2}{12\mu} \left| \frac{\partial p_e}{\partial x} \right|, \quad (54)$$

che permette di determinare la velocità media a partire dal gradiente di pressione in direzione  $x$ . Lo sforzo tangenziale adimensionale si calcola come nell'Eq.(46), per cui, usando l'Eq.(49),

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} (1 - 2\tilde{y}). \quad (55)$$

Lo sforzo tangenziale risulta, allora, distribuito in maniera lineare lungo  $y$  (Fig. 4), ed è pari a zero in corrispondenza dell'asse di simmetria.

### 3.3 Flusso piano di Couette-Poiseuille

Consideriamo ora il caso di due lastre piane indefinite parallele poste a distanza  $\delta$ , di cui una ferma e l'altra in moto con velocità costante  $V$ ; nell'intercapedine tra le due lastre è presente un fluido Newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità dinamica  $\mu$  (Fig. 5). Usiamo un sistema di riferimento in cui l'asse  $x$  individua la direzione del moto e l'asse  $y$  è perpendicolare alle lastre. La lastra ferma si trova a  $y = 0$ , mentre quella in moto si trova a  $y = \delta$ . Ipotizziamo: (1) che la velocità del fluido abbia solo componente in direzione  $x$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = (u, 0)$  (essendo il problema piano ignoriamo la direzione  $z$ ): questo equivale ad ipotizzare che il moto del fluido sia laminare; (2) che ci sia un gradiente costante di pressione in direzione  $x$ ,  $\partial p_e / \partial x = \text{cost}$ . La configurazione di flusso appena descritta prende il nome di flusso piano di Couette-Poiseuille, e rappresenta, evidentemente, una combinazione dei due casi analizzati in precedenza.

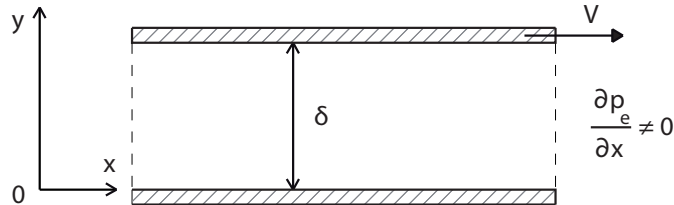


Figura 5: flusso piano di Couette-Poiseuille.

Usiamo come grandezze scala lo spessore  $\delta$  e la velocità  $V$  della lastra superiore. Invece di risolvere le equazioni di Navier-Stokes seguendo la stessa procedura svolta nei due casi precedenti, notiamo che, con l'ipotesi di laminarità del moto, le inerzie convettive si annullano, per cui le equazioni differenziali diventano lineari. In queste condizioni vale il **principio di sovrapposizione degli effetti**, e il profilo di velocità è dato, semplicemente, dalla somma dei profili di velocità del flusso di Couette e di quello di Poiseuille, cioè

$$\tilde{u} = -\frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} \tilde{y}(1 - \tilde{y}) + \tilde{y}. \quad (56)$$

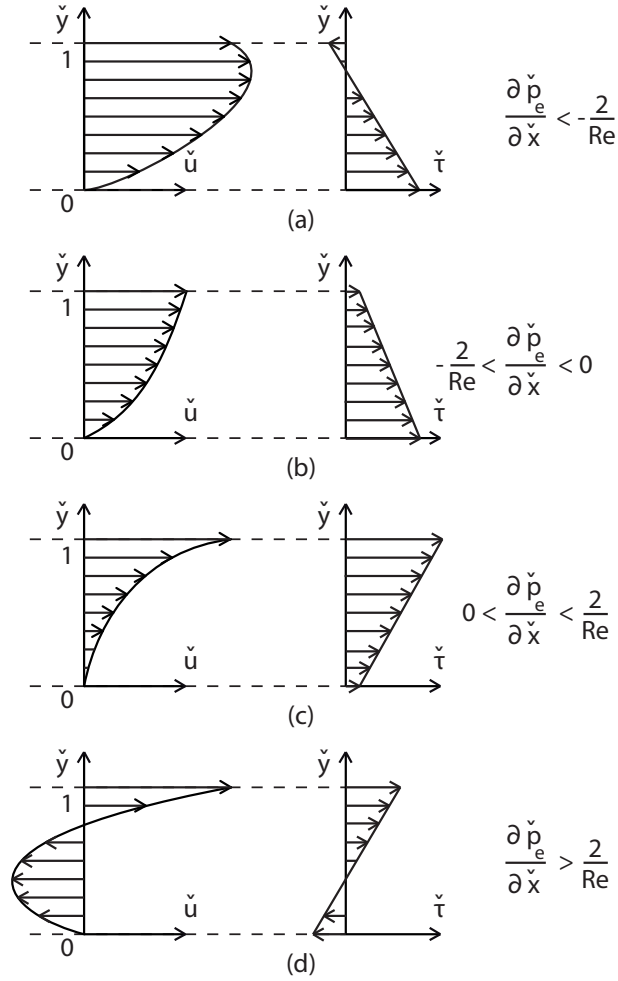


Figura 6: possibili profili di velocità e sforzo tangenziale nel flusso piano di Couette-Poiseuille.

Allo stesso modo, la distribuzione degli sforzi tangenziali risulta la somma delle distribuzioni nei due casi esaminati in precedenza,

$$\tilde{\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} (1 - 2\check{y}) + \frac{1}{\text{Re}}. \quad (57)$$

A seconda del segno del gradiente di pressione imposto e del segno della derivata della velocità rispetto a  $y$  in corrispondenza delle lastre (per la legge di Newton equivalenti al segno dello sforzo tangenziale in  $\check{y} = 0$  e  $\check{y} = \delta$ , che, dall'Eq.(57) si annullano quando  $\partial \check{p}_e / \partial \check{x} = \pm 2/\text{Re}$ ), possiamo avere i seguenti casi:

- (a)  $\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} < -\frac{2}{\text{Re}}$ : la concavità del profilo parabolico di velocità è verso il

basso,  $\check{\tau}(0) > 0$ ,  $\check{\tau}(1) < 0$  e le velocità sono positive in tutto il campo di moto;

(b)  $-\frac{2}{\text{Re}} < \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} < 0$ : la concavità del profilo parabolico di velocità è verso il basso,  $\check{\tau}(0) > \check{\tau}(1) > 0$  e le velocità sono positive in tutto il campo di moto;

(c)  $0 < \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \leq \frac{2}{\text{Re}}$ : la concavità del profilo parabolico di velocità è verso l'alto,  $\check{\tau}(1) > \check{\tau}(0) > 0$  e le velocità sono positive in tutto il campo di moto;

(d)  $\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} > \frac{2}{\text{Re}}$ : la concavità del profilo parabolico di velocità è verso l'alto,  $\check{\tau}(0) < 0$ ,  $\check{\tau}(1) > 0$  e il campo di moto presenta un'inversione del flusso. Ponendo la velocità pari a zero nell'Eq.(56), si ottiene la posizione  $\check{y}$  del punto di inversione: le velocità sono positive per  $\check{y} \geq 1 - 2/(\text{Re}\partial \check{p}_e/\partial \check{x})$  e negative per  $\check{y} < 1 - 2/(\text{Re}\partial \check{p}_e/\partial \check{x})$ .

I profili di velocità nei vari casi (e i corrispondenti profili di sforzo tangenziale) sono riportati in Fig. 6.

### 3.4 Moto di Poiseuille in condotta

Risolviamo ora il caso di un fluido Newtoniano incomprimibile che si muove in condizioni di moto laminare con portata  $Q$  costante in una condotta cilindrica a sezione circolare di diametro  $D$  (e raggio  $R$ ) e asse rettilineo inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo  $\psi$  (**moto di Poiseuille in condotta**, Fig. 7). Questo caso è stato analizzato in precedenza utilizzando un approccio sperimentale (Cap. 7).

Fissiamo un sistema di riferimento in cui l'asse  $x$  è diretto come l'asse della condotta ed è concorde col verso del moto (l'unica componente di velocità non nulla è quella in direzione  $x$ , così che  $\bar{\mathbf{v}} = u\hat{\mathbf{i}}$ ). Risolviamo per il caso in esame le equazioni di Navier-Stokes, Eqs. (20) e (21), in forma indefinita dimensionale. L'equazione di continuità,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (58)$$

si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (59)$$

con l'ipotesi di laminarità del moto ( $v = w = 0$ ). Le equazioni di bilancio di quantità di moto,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (60a)$$

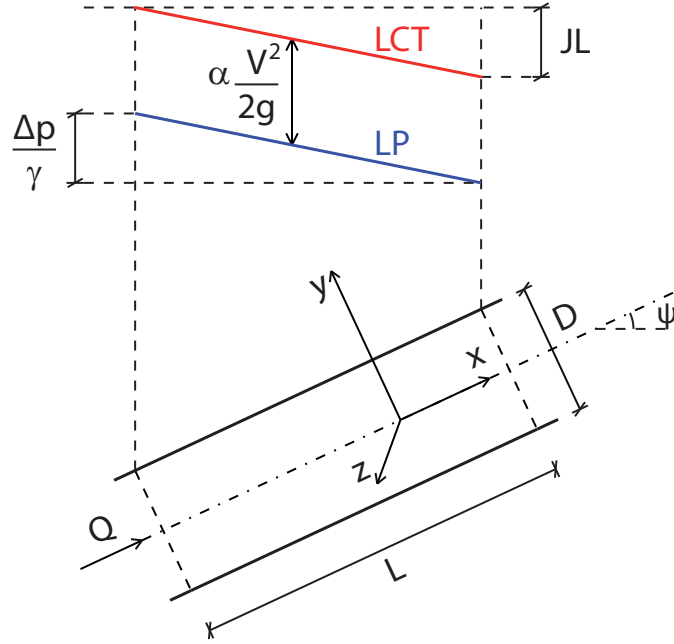


Figura 7: moto di Poiseuille in condotta.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (60b)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \quad (60c)$$

considerando che il moto è stazionario, che  $v = w = 0$  e che vale l'Eq.(59), diventano, dividendo tutto per  $\gamma = \rho g$  e riarrangiando,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 u \quad (61a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (61b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0. \quad (61c)$$

Le Eqs. (61b) e (61c) ci dicono che la distribuzione delle pressioni è idrostatica sulla sezione trasversale al flusso: si tratta, infatti, di una corrente gradualmente variata (Cap. 5, Par. 2). Per risolvere l'Eq.(61a), passiamo ad un sistema di riferimento in coordinate cilindriche con l'asse  $x$  che coincide con l'asse  $x$  del sistema di riferimento Cartesiano, l'asse  $r$  che misura la distanza radiale dall'asse della condotta e l'anomalia  $\theta$  che misura la rotazione attorno all'asse (Fig. 8).

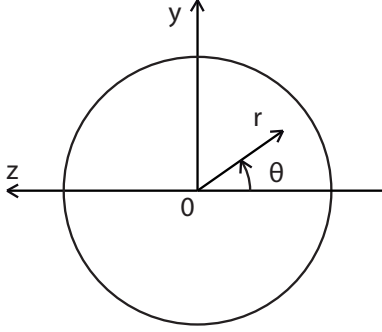


Figura 8: sistema di riferimento in coordinate cilindriche.

Riscriviamo il Laplaciano di  $u$  nell'Eq.(61a) in coordinate cilindriche e notiamo che la derivata in direzione  $x$  della quota piezometrica è uguale a  $-J$ , con  $J$  cadente energetica media, per cui

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}. \quad (62)$$

La derivata seconda della  $u$  rispetto a  $x$  è nulla per via dell'Eq.(59), mentre la derivata seconda rispetto a  $\theta$  è nulla per simmetria. Quindi,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\gamma J}{\mu}, \quad (63)$$

e, integrando,

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{r^2}{2} + A, \quad (64)$$

dove  $A$  è la costante di integrazione. Per simmetria, la velocità deve necessariamente presentare un massimo in corrispondenza dell'asse ( $\partial u / \partial r = 0$  per  $r = 0$ ) per cui risulta  $A = 0$ . Integrando l'Eq.(64), otteniamo

$$u = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{r^2}{4} + B, \quad (65)$$

dove  $B$  è una seconda costante di integrazione, che ricaviamo imponendo la condizione di aderenza alla parete ( $u = 0$  per  $r = R$ ). In definitiva,

$$u = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{R^2 - r^2}{4}, \quad (66)$$

cioè il profilo di velocità sulla sezione trasversale al flusso è parabolico. La velocità massima in corrispondenza dell'asse ( $r = 0$ ) vale

$$u_{max} = \frac{\gamma J D^2}{16\mu}, \quad (67)$$

con  $D = 2R$ . La portata si calcola come integrale della velocità sull'area della sezione trasversale: in coordinate cilindriche  $Q = \int_0^R u 2\pi r dr$ , per cui

$$Q = \frac{\gamma J}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi \gamma J R^4}{8\mu} = \frac{\pi \gamma J D^4}{128\mu}. \quad (68)$$

L'Eq.(68) prende il nome di **formula di Hagen-Poiseuille** [4, 5], e, a parte le poche implicazioni pratiche (perché sia valida il moto deve essere laminare, come, per esempio, il moto del sangue nelle vene e nei capillari), la sua verifica sperimentale è risultata storicamente la prima conferma della validità della legge di Newton (proporzionalità tra sforzi e velocità di deformazione). Dividendo la portata  $Q$  per l'area della sezione trasversale  $\pi D^2/4$  otteniamo la velocità media sulla sezione,

$$V = \frac{\gamma J D^2}{32\mu} = \frac{u_{max}}{2}, \quad (69)$$

che risulta pari a metà di quella massima. Dall'Eq.(69) otteniamo l'espressione della cadente energetica in condizioni di moto laminare,

$$J = 64 \frac{\mu}{\rho V D} \frac{V^2}{2gD} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{V^2}{2gD} = \lambda \frac{V^2}{2gD}. \quad (70)$$

Abbiamo appena ottenuto, per via puramente teorica, che l'indice di resistenza  $\lambda$  nella formula di Darcy-Weisbach è pari a  $64/\text{Re}$  in condizioni di moto laminare. Ricordiamo che l'analisi dimensionale svolta in precedenza (Cap. 7, Par. 1.1) non era in grado di fornire il valore numerico del coefficiente di inversa proporzionalità col numero di Reynolds senza ricorrere agli esperimenti.

Vediamo ora come è possibile risolvere il moto di Poiseuille in condotta usando le equazioni di Navier-Stokes in forma globale. Identifichiamo un volume di controllo costituito da un cilindro coassiale con la condotta di raggio  $r$  e lunghezza  $L$  (Fig. 9).

Suddividiamo la superficie di contorno del volume di controllo in due superfici piane denominate 1 e 2 (le basi del cilindro, aventi normale pari a  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $-\hat{\mathbf{i}}$  rispettivamente) e una superficie curva 0 (la superficie laterale del cilindro). Sul volume di controllo vale l'Eq.(30), che si scrive

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{p,0} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{p,1} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{p,2} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{\mu,0} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{\mu,1} + \bar{\mathbf{\Pi}}_{\mu,2} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (71)$$

dove:

- la risultante delle inerzie locali  $\bar{\mathbf{I}}$  è nulla perché il problema è stazionario;
- il flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale  $A_0$  del cilindro,  $\bar{\mathbf{M}}_0 = \int_{A_0} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$ , è nullo perché il versore normale ad



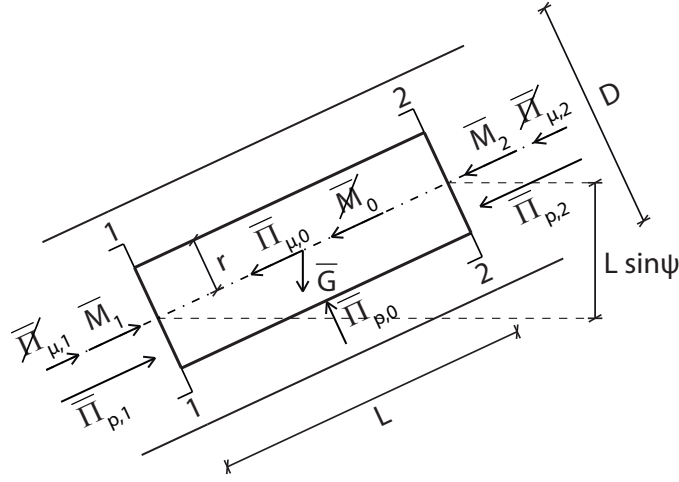


Figura 9: volume di controllo per l'applicazione delle equazioni di Navier-Stokes in forma globale al moto di Poiseuille in condotta.

ogni elemento infinitesimo di superficie laterale è diretto radialmente, mentre la velocità ha solo componente assiale, per cui  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  dappertutto;

- il flusso di quantità di moto attraverso la superficie piana 1 di area  $A_1$  risulta, con  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_1 &= \int_{A_1} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = \int_{A_1} \rho u \hat{\mathbf{i}} (u \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) dA \\ &= \int_{A_1} \rho u^2 \hat{\mathbf{i}} dA = \rho \left( \int_{A_1} u^2 dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \beta_1 \rho V_1^2 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}},\end{aligned}$$

dove  $\beta_1 = \int_{A_1} u^2 dA / (V_1^2 A_1)$  è il **coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto** o **coefficiente di Boussinesq**, introdotto per poter utilizzare il quadrato della velocità media  $V_1 = \int_{A_1} u dA / A_1$  in luogo dell'integrale della velocità al quadrato sulla sezione trasversale (analogo del coefficiente di ragguglio della potenza cinetica).  $\bar{\mathbf{M}}_1$  è normale alla superficie 1, diretto entrante nel volume, e, per simmetria della distribuzione di velocità, ha retta di applicazione passante per il baricentro della sezione.

- Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie piana 2 di area  $A_2 = A_1$  risulta, con  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_2 &= \int_{A_2} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = - \int_{A_2} \rho u \hat{\mathbf{i}} (u \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) dA \\ &= - \int_{A_2} \rho u^2 \hat{\mathbf{i}} dA = -\rho \left( \int_{A_2} u^2 dA \right) \hat{\mathbf{i}} = -\beta_2 \rho V_2^2 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Anche  $\overline{\mathbf{M}}_2$  è normale alla superficie 2, diretto entrante nel volume, e, per simmetria della distribuzione di velocità, ha retta di applicazione passante per il baricentro della sezione. Il coefficiente  $\beta_2$  e la velocità media  $V_2$  sono uguali a  $\beta_1$  e  $V_1$ , rispettivamente, dal momento che la velocità non cambia in direzione  $x$  (per la continuità).

- La forza peso  $\overline{\mathbf{G}}$  risulta diretta verticalmente verso il basso con retta di applicazione passante per il baricentro del volume; il suo modulo è pari a  $\gamma\pi r^2 L$ , mentre la componente in direzione  $x$  è pari a  $-\gamma\pi r^2 L \sin \psi$ .
- La risultante delle pressioni sulla superficie laterale  $\overline{\mathbf{\Pi}}_{p,0} = \int_{A_0} p \hat{\mathbf{n}} dA$  risulta diretta radialmente (il versore per ogni superficie infinitesima è infatti perpendicolare all'asse del cilindro) e, per simmetria, è contenuta nel piano verticale che contiene l'asse del cilindro.
- La risultante delle pressioni sulla superficie 1 risulta, con  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$ ,

$$\overline{\mathbf{\Pi}}_{p,1} = \int_{A_1} p \hat{\mathbf{n}} dA = p_1 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}},$$

dove  $p_1$  è la pressione in corrispondenza del baricentro della sezione 1. È un vettore diretto normalmente alla superficie 1 ed entrante nel volume se  $p_1$  è positiva. La sua retta di applicazione passa per il baricentro del solido delle pressioni.

- La risultante delle pressioni sulla superficie 2 risulta, con  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$ ,

$$\overline{\mathbf{\Pi}}_{p,2} = \int_{A_2} p \hat{\mathbf{n}} dA = -p_2 \pi r^2 \hat{\mathbf{i}},$$

dove  $p_2$  è la pressione in corrispondenza del baricentro della sezione 2. È un vettore diretto normalmente alla superficie 2 ed entrante nel volume se  $p_2$  è positiva. La sua retta di applicazione passa per il baricentro del solido delle pressioni.

- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie laterale risulta

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,0} &= - \int_{A_0} \mu \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial n} dA = -\mu \left( \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial n} dA \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= -\mu \frac{\partial u}{\partial n} A_0 \hat{\mathbf{i}} = -\mu \frac{\partial u}{\partial n} 2\pi r L \hat{\mathbf{i}} = -\tau 2\pi r L \hat{\mathbf{i}}, \end{aligned}$$

visto che la derivata della velocità in direzione perpendicolare all'asse è una costante, per simmetria cilindrica, sulla superficie laterale (che si trova a una distanza fissata dall'asse) e avendo introdotto la legge di Newton  $\tau = \mu \partial u / \partial n$ .  $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\mu,0}$ , per simmetria della distribuzione di velocità, è un vettore diretto come l'asse  $x$ , avente verso opposto a quello del moto e retta di applicazione che coincide con l'asse del cilindro.

- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 1 risulta, con  $n = x$ ,

$$\bar{\Pi}_{\mu,1} = - \int_{A_1} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA = -\mu \left( \int_{A_1} \frac{\partial u}{\partial x} dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{0}},$$

visto che per continuità la derivata della velocità in direzione  $x$  è ovunque nulla.

- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 2 risulta, con  $n = -x$ ,

$$\bar{\Pi}_{\mu,2} = - \int_{A_2} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} dA = \mu \left( \int_{A_2} \frac{\partial u}{\partial x} dA \right) \hat{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{0}},$$

sempre per continuità.

Proiettiamo ora l'Eq.(71) in direzione  $x$ , rispetto alla quale  $\bar{\Pi}_{p,0}$  non ha componente, ottenendo

$$M_{1,x} + M_{2,x} + G_x + \Pi_{p,1,x} + \Pi_{p,2,x} + \Pi_{\mu,0,x} = 0. \quad (72)$$

Sostituendo le componenti  $x$  dei termini superstiti, risulta

$$\tau 2\pi r L = \beta_1 \rho V_1^2 \pi r^2 - \beta_2 \rho V_2^2 \pi r^2 - \gamma \pi r^2 L \sin \psi + p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2. \quad (73)$$

I flussi di quantità di moto si elidono a vicenda. Notiamo che la quantità  $L \sin \psi$  rappresenta la differenza di quota geodetica tra i baricentri della sezione 2 e della sezione 1,  $\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1$ . Se facciamo questa sostituzione e raccogliamo a secondo membro il peso specifico e l'area della sezione trasversale, otteniamo

$$\tau 2\pi r L = \gamma \pi r^2 \left[ \left( \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]. \quad (74)$$

La differenza tra quote piezometriche della sezione 1 e della sezione 2 equivale alla perdita di energia meccanica  $JL$  subita dalla corrente lungo il tratto di lunghezza  $L$ . L'Eq.(74) si riduce, allora, a

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J, \quad (75)$$

che indica che lo sforzo tangenziale (viscoso) è distribuito linearmente con la coordinata radiale: è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete della condotta. La distribuzione dello sforzo tangenziale sulla sezione trasversale al flusso nella condotta è rappresentata in Fig. 10, insieme alla distribuzione di velocità rappresentata dall'Eq.(66).

Se nell'Eq.(75) introduciamo la legge di Newton,  $\tau = \mu \partial u / \partial n$ , e notiamo che, sulla superficie laterale,  $n = -r$ , otteniamo

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\gamma \frac{r}{2} J, \quad (76)$$

che coincide con l'Eq.(64). La soluzione delle equazioni globali di Navier-Stokes risulta, ovviamente, congruente a quella delle equazioni indefinite.

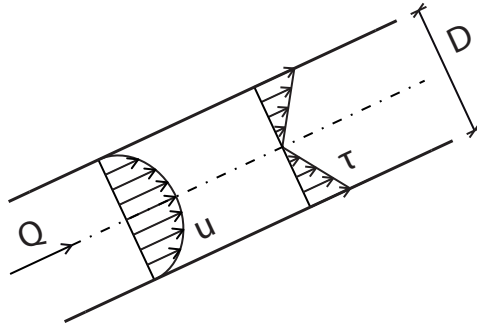


Figura 10: profili di velocità e sforzo tangenziale nel moto di Poiseuille in condotta.

### 3.5 Lubrificazione

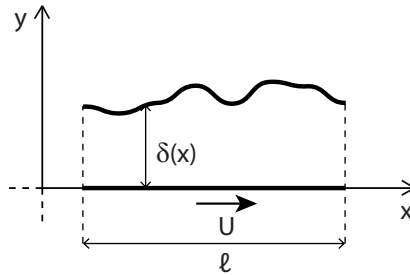


Figura 11: lubrificazione ad opera di un fluido viscoso frapposto tra due superfici solide in moto relativo.

Consideriamo, infine, il caso, estremamente importante dal punto di vista delle applicazioni, di un fluido incomprimibile viscoso che è frapposto tra due superfici solide, di cui una superiore ferma e l'altra inferiore piana in moto con velocità tangenziale costante  $U$  (**velocità di scorrimento**) lungo la direzione  $x$ . Poniamo  $y = 0$  in corrispondenza della superficie piana in moto, mentre la superficie ferma è posta a distanza  $y = \delta(x)$  da essa. Al solito, per semplicità, consideriamo il caso piano e trascuriamo la direzione  $z$ . Supponiamo anche che l'estensione  $l$  delle due superfici lungo  $x$  sia molto maggiore di  $\delta$ . La situazione è rappresentata in Fig. 11, dove, per semplicità, si è considerata piana la superficie solida inferiore ferma. Usiamo  $U$ ,  $l$  e  $\rho U^2$  per adimensionalizzare velocità, lunghezze e pressioni nelle equazioni di Navier-Stokes. L'equazione di continuità (Eq.(37)) fornisce

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (77)$$

dove  $\tilde{u} = u/U$  e  $\tilde{v} = v/U$  rappresentano le velocità adimensionali del fluido lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente. Proiettando lungo  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  l'Eq.(39) di bilancio

della quantità di moto (ponendo uguali a zero le inerzie locali), otteniamo

$$\begin{aligned}\check{u}\frac{\partial\check{u}}{\partial\check{x}} + \check{v}\frac{\partial\check{u}}{\partial\check{y}} &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{x}} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2\check{u}}{\partial\check{x}^2} + \frac{\partial^2\check{u}}{\partial\check{y}^2}\right) \\ \check{u}\frac{\partial\check{v}}{\partial\check{x}} + \check{v}\frac{\partial\check{v}}{\partial\check{y}} &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{y}} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2\check{v}}{\partial\check{x}^2} + \frac{\partial^2\check{v}}{\partial\check{y}^2}\right).\end{aligned}\quad (78)$$

dove  $\text{Re} = \frac{\rho Ul}{\mu}$ . Riscriviamo ora le equazioni mettendo in evidenza l'ordine di grandezza dei vari termini che le compongono. Abbiamo ipotizzato che  $\delta$  sia piccolo rispetto a  $l$ , cioè che  $\check{\delta} \ll 1$ . Dal momento che  $u$  è compresa tra 0 e  $U$ ,  $u = \mathcal{O}(U)$  e, quindi,  $\check{u} = \mathcal{O}(1)$ ; allo stesso modo,  $x$  è compresa tra 0 e  $l$ , per cui  $x = \mathcal{O}(l)$  e  $\check{x} = \mathcal{O}(1)$ . Invece,  $y$  è compresa tra 0 e  $\delta$ , per cui  $y = \mathcal{O}(\delta)$  e  $\check{y} = \mathcal{O}(\check{\delta})$ . Sostituendo gli ordini di grandezza nell'equazione di continuità, otteniamo

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(\check{v})}{\mathcal{O}(\check{\delta})} = 0, \quad (79)$$

che ci dice che deve essere  $\check{v} = \mathcal{O}(\check{\delta})$  affinché il secondo termine a sinistra dell'uguale possa bilanciare il primo termine. Facciamo ora l'ipotesi fondamentale che  $\text{Re} < 1$  (**flusso di Stokes**, per cui  $\text{Re} = \mathcal{O}(1)$ ). Siamo, cioè, interessati a flussi a bassa velocità e/o alta viscosità. Usando gli ordini di grandezza nelle equazioni di bilancio di quantità di moto, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(1)\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\check{\delta})\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\check{\delta})} &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{x}} + \frac{1}{\mathcal{O}(1)}\left(\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\check{\delta}^2)}\right) \\ \mathcal{O}(1)\frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\check{\delta})\frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(\check{\delta})} &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{y}} + \frac{1}{\mathcal{O}(1)}\left(\frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(\check{\delta}^2)}\right).\end{aligned}\quad (80)$$

Non abbiamo usato gli ordini di grandezza per i gradienti delle pressioni perché, al momento, non siamo in grado di determinarli. Se  $\check{\delta} \ll 1$ , i termini di ordine  $1/\check{\delta}^2$  sono dominanti. Trascurando, perciò, tutti i termini di ordine uguale o inferiore a  $1/\check{\delta}$ , otteniamo

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{x}} + \frac{1}{\text{Re}}\frac{\partial^2\check{u}}{\partial\check{y}^2} \\ 0 &= -\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{y}}.\end{aligned}\quad (81)$$

La seconda equazione ci dice che l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica non varia lungo  $y$ , ma solo lungo  $x$ . Possiamo, perciò, integrare facilmente la prima delle Eqs. (81), con le condizioni al contorno  $\check{u} = 1$  quando  $\check{y} = 0$  e  $\check{u} = 0$  quando  $\check{y} = \check{\delta}$ , ottenendo

$$\check{u} = -\frac{\text{Re}}{2}\frac{\partial\check{p}_e}{\partial\check{x}}\check{y}(\check{\delta} - \check{y}) + 1 - \frac{\check{y}}{\check{\delta}}. \quad (82)$$

Si nota immediatamente che questo profilo di velocità è la sovrapposizione del profilo parabolico di un flusso piano di Poiseuille (indotto dal gradiente di pressione) e del profilo lineare di un flusso piano di Couette (indotto dal moto della superficie solida inferiore), già incontrato nel Par. 3.3. In funzione del valore locale di gradiente di pressione, dunque, potranno verificarsi i tre tipi di profilo di velocità rappresentati in Fig. 6.

L'equazione di continuità in forma globale, ci dice che la portata volumetrica per unità di larghezza,  $\check{q} = \int_0^{\check{\delta}} \check{u} d\check{y}$  deve mantenersi costante lungo  $x$ . Usando il profilo di velocità, Eq.(82), nella definizione di  $\check{q}$ , si ottiene,

$$\check{q} = -\frac{\text{Re}}{12} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} \check{\delta}^3 + \frac{\check{\delta}}{2}. \quad (83)$$

Invertendo l'Eq.(83), si ottiene un'espressione per il gradiente di pressione,

$$\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} = \frac{12}{\text{Re}} \left( \frac{1}{2\check{\delta}^2} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^3} \right), \quad (84)$$

che, usata nell'Eq.(82), fornisce

$$\check{u} = \left( 3 - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}} \right) \left( \frac{\check{y}}{\check{\delta}} \right)^2 - \left( 4 - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}} \right) \frac{\check{y}}{\check{\delta}} + 1. \quad (85)$$

Calcoliamo ora la velocità in direzione  $y$ . Otteniamo la derivata di  $\check{u}$  rispetto a  $\check{x}$  (notando che la dipendenza di  $\check{u}$  da  $x$  entra solo attraverso la dipendenza dello spessore  $\check{\delta}$  da  $\check{x}$ ):

$$\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} = \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{\delta}} \frac{d\check{\delta}}{d\check{x}} = \check{y} \left( -\frac{6\check{y} + 12\check{q}}{\check{\delta}^3} + \frac{4}{\check{\delta}^2} + \frac{18\check{q}\check{y}}{\check{\delta}^4} \right) \frac{d\check{\delta}}{d\check{x}}. \quad (86)$$

Inserendo l'Eq.(86) nell'equazione di continuità (Eq.(77)), otteniamo

$$\frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} = \left( \frac{6\check{y}^2 + 12\check{q}\check{y}}{\check{\delta}^3} - \frac{4\check{y}}{\check{\delta}^2} - \frac{18\check{q}\check{y}^2}{\check{\delta}^4} \right) \frac{d\check{\delta}}{d\check{x}}. \quad (87)$$

che, integrata con la condizione al contorno  $\check{v} = 0$  quando  $\check{y} = 0$ , fornisce

$$\check{v} = \left( 2 - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}} \right) \left[ \left( \frac{\check{y}}{\check{\delta}} \right)^3 - \left( \frac{\check{y}}{\check{\delta}} \right)^2 \right] \frac{d\check{\delta}}{d\check{x}}. \quad (88)$$

Per procedere ulteriormente dobbiamo ora specificare la forma dell'intercapedine  $\delta(x)$ . Consideriamo il caso di una slitta piana inclinata rispetto alla superficie piana in moto e che si estende tra  $x = 0$  e  $x = l$  (Fig. 12). In forma adimensionale, la distanza tra le due superfici può essere espressa come:

$$\check{\delta} = \check{\delta}_1 - \Delta \check{x}, \quad (89)$$

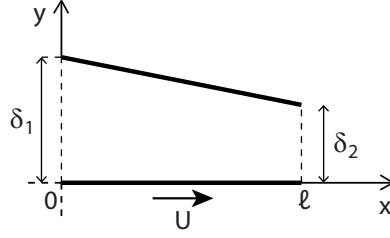


Figura 12: lubrificazione su slitta piana.

dove  $\check{\delta}_1$  è lo spessore adimensionale dell'intercapedine in corrispondenza di  $\check{x} = 0$  e  $\Delta = \check{\delta}_1 - \check{\delta}_2$ , con  $\check{\delta}_2$  spessore adimensionale dell'intercapedine in corrispondenza di  $\check{x} = 1$ . Si noti che risulta  $\frac{d\check{\delta}}{d\check{x}} = -\Delta$ .

La distribuzione della pressione in eccesso rispetto all'idrostatica in funzione di  $x$  si ottiene integrando l'Eq.(84), con la condizione al contorno  $\check{p}_e = 0$  quando  $\check{x} = 0$  (si ammette che la pressione sia idrostatica per  $x \leq 0$ , dove non c'è la slitta):

$$\begin{aligned}
 \check{p}_e(\check{x}) &= \int_0^{\check{x}} \frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} d\check{x} = \frac{12}{\text{Re}} \int_0^{\check{x}} \left( \frac{1}{2\check{\delta}^2} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^3} \right) d\check{x} \\
 &= \frac{12}{\text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}} \left( \frac{1}{2\check{\delta}^2} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^3} \right) \frac{d\check{x}}{d\check{\delta}} d\check{\delta} = -\frac{12}{\Delta \text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}} \left( \frac{1}{2\check{\delta}^2} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^3} \right) d\check{\delta} \\
 &= \frac{6}{\Delta \text{Re}} \left( \frac{1}{\check{\delta}} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^2} - \frac{1}{\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1^2} \right). \tag{90}
 \end{aligned}$$

Usando la condizione che  $\check{p}_e = 0$  anche quando  $\check{x} = 1$ , cioè  $\check{\delta} = \check{\delta}_2$ , nell'Eq.(90), si ottiene la portata per unità di larghezza in funzione della forma dell'intercapedine,

$$\check{q} = \left( \frac{1}{\check{\delta}_2} - \frac{1}{\check{\delta}_1} \right) \left( \frac{1}{\check{\delta}_2^2} - \frac{1}{\check{\delta}_1^2} \right)^{-1} = \frac{\check{\delta}_1 \check{\delta}_2}{\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2}. \tag{91}$$

L'Eq.(91) ci dice, come era da attendersi, che la portata è zero se la slitta tocca la superficie piana inferiore ( $\check{\delta}_2 = 0$ ).

Sostituendo l'Eq.(91) nell'Eq.(90), otteniamo

$$\check{p}_e(\check{x}) = \frac{6}{\Delta \text{Re}} \frac{(\check{\delta}_1 - \check{\delta})(\check{\delta} - \check{\delta}_2)}{\check{\delta}^2 (\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2)}. \tag{92}$$

In Fig. 13 è riportato l'andamento dell'eccesso rispetto all'idrostatica normalizzato in funzione della coordinata  $\check{x}$  nel caso in cui  $\check{\delta}_1 = 0.2$  e  $\check{\delta}_2 = 0.05$ , per cui risulta  $\Delta = 0.15$  e  $\check{q} = 0.04$ . Le corrispondenti distribuzioni delle componenti di velocità lungo  $x$  e  $y$  si ottengono dalle Eqs. (85) e (88) e sono rappresentate in Fig. 14.

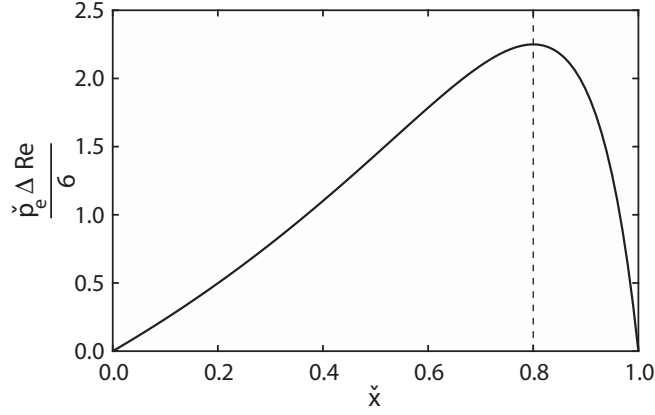


Figura 13: distribuzione normalizzata di pressione in eccesso rispetto all'idrostatica lungo  $\tilde{x}$  nel caso di slitta piana con  $\tilde{\delta}_1 = 0.2$  e  $\tilde{\delta}_2 = 0.05$ .

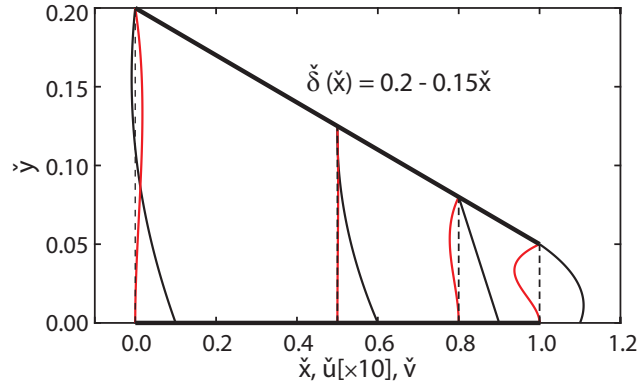


Figura 14: distribuzioni di velocità  $\tilde{u}$  (linee nere) e  $\tilde{v}$  (linee rosse) in corrispondenza di varie sezioni trasversali (a  $\tilde{x} = 0, 0.5, 0.8$  e  $1$ ) nel caso di slitta piana con  $\tilde{\delta}_1 = 0.2$  e  $\tilde{\delta}_2 = 0.05$ .

La distribuzione della pressione presenta un massimo quando  $\tilde{\delta} = 2\tilde{q}$ , cioè  $\tilde{x} = 0.8$  nell'esempio considerato, come si ricava ponendo uguale a zero il gradiente di pressione nell'Eq.(84). Il gradiente di pressione è avverso per  $\tilde{x} < 0.8$  e favorevole per  $\tilde{x} > 0.8$ . Laddove la pressione è massima, il profilo di velocità  $\tilde{u}(\tilde{y})$  è lineare (Fig. 14). Nella regione di gradiente di pressione avverso la concavità del profilo di velocità è verso il basso e possono, perciò, essere presenti inversioni di flusso in prossimità della superficie della slitta piana. La regione di inversione di flusso si estende nella zona in cui  $\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=\tilde{\delta}} > 0$ , cioè, dall'Eq.(85), quando  $\tilde{\delta} > 3\tilde{q}$ . Visto che il massimo spessore dell'intercapedine è pari a  $\tilde{\delta}_1$ , usando tale valore nella relazione appena trovata e l'espressione della portata per unità di larghezza dell'Eq.(91), si



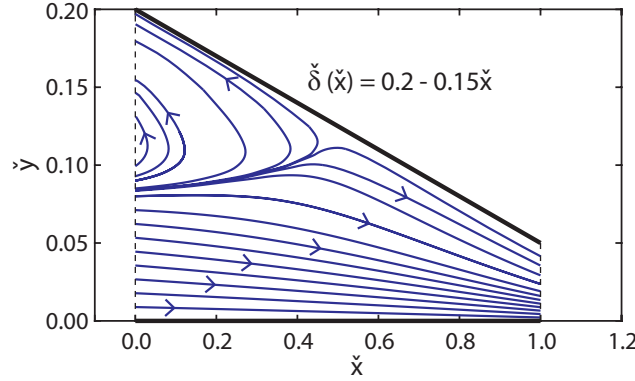


Figura 15: linee di corrente nel caso di slitta piana con  $\check{\delta}_1 = 0.2$  e  $\check{\delta}_2 = 0.05$ .

ottiene che deve essere  $\frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} > 2$  affinché l'inversione di flusso sia presente almeno in corrispondenza di  $\check{x} = 0$ . In Fig. 15 sono rappresentate le linee di corrente nell'esempio considerato che evidenziano la zona di inversione di flusso.

Integrando la distribuzione di pressione lungo  $x$  (Eq.(90)), si ottiene la forza in direzione  $y$  per unità di larghezza che tende a mantenere separate le due superfici (limitandone, perciò, l'usura per attrito diretto):

$$\begin{aligned}
\check{F}_y &= \int_0^1 \check{p}_e d\check{x} = \frac{6}{\Delta \text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \left( \frac{1}{\check{\delta}} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^2} - \frac{1}{\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1^2} \right) \frac{d\check{x}}{d\check{\delta}} d\check{\delta} \\
&= -\frac{6}{\Delta^2 \text{Re}} \left( \ln \check{\delta} + \frac{\check{q}}{\check{\delta}} - \frac{\check{\delta}}{\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}\check{\delta}}{\check{\delta}_1^2} \right) \Big|_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \\
&= \frac{6}{\Delta^2 \text{Re}} \left[ \ln \frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} + \left( \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}_2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1} \right) \right] \\
&= \frac{6}{\Delta^2 \text{Re}} \left( \ln \frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} - 2 \frac{\Delta}{\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2} \right), \tag{93}
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso dell'Eq.(91). L'Eq.(91) ci dice, anche, che, nel caso in cui le due superfici piane siano parallele ( $\check{\delta}_1 = \check{\delta}_2$ ), risulta  $\check{q} = \check{\delta}_1/2$ , per cui il gradiente di pressione è nullo (si veda l'Eq.(84)) e il flusso diventa un flusso di Couette piano. In questo caso, la  $\check{p}_e$  è nulla e non è presente forza in direzione perpendicolare alla velocità di scorrimento.

Si può calcolare la distanza  $\check{X}$  della retta di applicazione di  $\check{F}_y$  da  $\check{x} = 0$

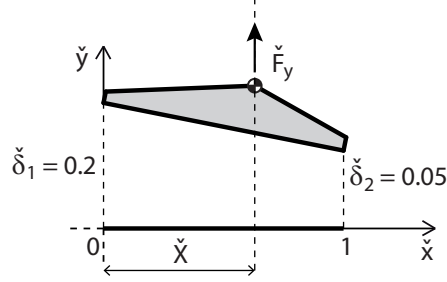


Figura 16: configurazione stabile di una slitta piana libera di ruotare attorno a una cerniera incernierata linee di corrente nel caso di slitta piana con  $\check{\delta}_1 = 0.2$  e  $\check{\delta}_2 = 0.05$ .

come coordinata  $\check{x}$  del baricentro del solido delle pressioni:

$$\begin{aligned}
\check{X} &= \frac{1}{\check{F}_y} \int_0^1 \check{p}_e \check{x} d\check{x} = \frac{1}{\check{F}_y} \frac{6}{\Delta \text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \left( \frac{1}{\check{\delta}} - \frac{\check{q}}{\check{\delta}^2} - \frac{1}{\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1^2} \right) \frac{\check{\delta}_1 - \check{\delta}}{\Delta} \frac{d\check{x}}{d\check{\delta}} d\check{\delta} \\
&= \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} + \frac{1}{\check{F}_y} \frac{6}{\Delta^3 \text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \left( 1 - \frac{\check{q}}{\check{\delta}} - \frac{\check{\delta}}{\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}\check{\delta}}{\check{\delta}_1^2} \right) d\check{\delta} \\
&= \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} + \frac{1}{\check{F}_y} \frac{6}{\Delta^3 \text{Re}} \left( \check{\delta} - \check{q} \ln \check{\delta} - \frac{\check{\delta}^2}{2\check{\delta}_1} + \frac{\check{q}\check{\delta}^2}{2\check{\delta}_1^2} \right) \Big|_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \\
&= \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} + \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} \frac{6}{\check{F}_y \Delta^2 \text{Re}} \left[ \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1} \ln \frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} - \left( 1 - \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\check{q}}{\check{\delta}_1} \right) \left( 1 - \frac{\check{\delta}_2^2}{\check{\delta}_1^2} \right) \right] \\
&= \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} + \frac{\check{\delta}_1}{\Delta} \left( \ln \frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} - 2 \frac{\Delta}{\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2} \right)^{-1} \left( \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2} \ln \frac{\check{\delta}_1}{\check{\delta}_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\check{\delta}_1} \right), \quad (94)
\end{aligned}$$

usando le Eqs. (91) e (93). Nel nostro esempio ( $\check{\delta}_1 = 0.2$  e  $\check{\delta}_2 = 0.05$ ), risulta  $\check{X} \simeq 0.63$ . Se colleghiamo la slitta piana a una cerniera a cui baricentro appartiene alla retta di applicazione di  $\check{F}_y$  (Fig. 16), garantiamo che quella configurazione della slitta piana sia stabile: se la pendenza della slitta diminuisce (aumenta) rispetto a  $\Delta$ , la retta di applicazione di  $\check{F}_y$  si sposta verso sinistra (destra) causando una rotazione in senso orario (antiorario) attorno alla cerniera e un conseguente aumento (diminuzione) della pendenza.

Lo sforzo tangenziale che il fluido esercita sulla superficie piana posta a  $y = 0$  si calcola facilmente, usando la legge di Newton, come

$$\check{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} \Big|_{\check{y}=0}, \quad (95)$$

per cui, con l'Eq.(85),

$$\check{\tau} = -\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( 4 - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}} \right) \frac{1}{\check{\delta}} \right]. \quad (96)$$

Integrando lungo  $\check{x}$ , otteniamo, infine, la forza in direzione  $x$  per unità di larghezza che si oppone al moto della superficie piana (resistenza):

$$\begin{aligned}
\check{F}_x &= \int_0^1 \check{\tau} d\check{x} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \left( \frac{4}{\check{\delta}} - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}^2} \right) \frac{d\check{x}}{d\check{\delta}} d\check{\delta} \\
&= \frac{1}{\Delta \text{Re}} \int_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \left( \frac{4}{\check{\delta}} - 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}^2} \right) d\check{\delta} \\
&= \frac{1}{\Delta \text{Re}} \left( 4 \ln \check{\delta} + 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}} \right) \Big|_{\check{\delta}_1}^{\check{\delta}_2} \\
&= \frac{1}{\Delta \text{Re}} \left[ 4 \ln \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1} + 6 \frac{\check{q}}{\check{\delta}_2} \left( 1 - \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta \text{Re}} \left( 4 \ln \frac{\check{\delta}_2}{\check{\delta}_1} + 6 \frac{\Delta}{\check{\delta}_1 + \check{\delta}_2} \right), \tag{97}
\end{aligned}$$

usando l'Eq.(91).

Vale la pena notare che sia la  $\check{F}_x$  che la  $\check{F}_y$  dipendono dal numero di Reynolds (inversa proporzionalità) solo perché si è utilizzata la terna inerziale per adimensionalizzare le equazioni di Navier-Stokes. Nel caso della classica teoria della lubrificazione (quella che abbiamo illustrato in questo paragrafo [6]), la densità del fluido non conta: l'apparente dipendenza dalla densità attraverso il numero di Reynolds è un esempio di correlazione spuria (Cap. 7, Par. 1.1).

## Riferimenti bibliografici

- [1] Lang S., *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, Torino (1992).
- [2] Stokes, G.G., *On the theories of the Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of of Elastic Solids*, Trans. Cambridge Philos. Soc., 8, 287-305 (1845).
- [3] Navier, M., *Mémoire Sur les Lois du Mouvement des Fluides*, Mem. l'Acad. Sci., 6, 389-440 (1822).
- [4] Hagen, G.H.L., *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Rohren*, Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie, 46, 168 (1839).
- [5] Poiseuille, J.L., *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres*, Compte Rendus, 11, 961 (1840).
- [6] Reynolds, O., *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*, Phil. Trans. R. Soc. London, 177, 157-234 (1886).
- [7] Womersley, J.R., *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*, J Physiol., 127 (3), 553-563 (1955).